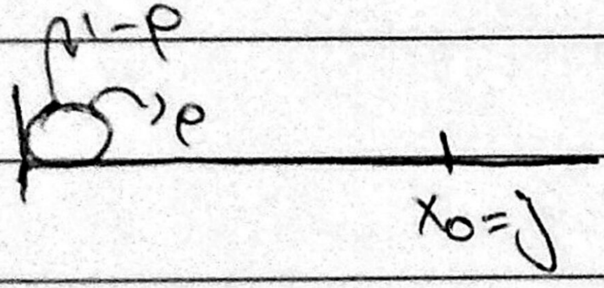
6/11/15

Απλός τυχαίος περίπατος με 1 φράγμα ανάκλασης



- $p=q$: $\pi_i = 0, \ \forall i$
- $p/q > 1 \Rightarrow p>q$: $\nexists$
- $p/q < 1 \Rightarrow p<q$: $\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \left(1-p/q\right)$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Ορισμός

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα (Μ.Α) είναι μια ακολουθία διακριτών τ.μ., ειδικότερα είναι μια σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$P(X_n=j \mid X_0 \dots X_{n-1}=i) = P(X_n=j \mid X_{n-1}=i)$$

(το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν)

$P(X_n=j \mid X_{n-1}=i) = P_{ij}(n-1,n)$, οι πιθανότητες μετάβασης από το $i \to j$ για $n-1 \to n$ βήμα

π.χ: $P_{25}(6,7) = P(X_7=5 \mid X_6=2)$

Ορισμός

Όταν οι πιθανότητες $P_{ij}(n-1,n)$ είναι ανεξάρτητες από το n $\forall i,j \in S=\{\text{χωρ. κατ.}\}$ τότε λέμε ότι η μαρκοβιανή αλυσίδα είναι στατική ή ομογενής.

Ορισμός

Ο πίνακας μετάβασης είναι ένας πίνακας πιθανοτήτων με το ij στοιχείο του να είναι η πιθανότητα P_{ij} και το άθροισμα κάθε γραμμής του κάνει 1.

Ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα 2 καταστάσεων

X_n σ.δ σε διακριτό χρόνο (Ε) με διακριτό χώρο ($S=\{0,1\}$) έχει την μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι ομογενής

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{με } \begin{array}{l} p_{00}+p_{01}=1 \\ p_{10}+p_{11}=1 \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{cases} a+\beta \neq 0 \\ a+\beta \neq 2 \end{cases}$$

Ερωτήματα

1) $P(X_n=j)=p_j^{(n)}$, $j=0,1$

2) $P(X_n=j \mid X_0=j)=p_{ij}^{(n)}$, $\forall i,j \in \{0,1\}$

3) $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n)}$, $\pi_0+\pi_1=1$

$P(X_{20}=1 \mid X_3=0)=p_{01}^{(17)}=P(X_{17}=1 \mid X_0=0)$ (λόγω μαρκοβιανής ιδιότητας, ομογενής)

1) $p_0^{(n)}=P(X_n=0)=P\left(\begin{matrix}\text{να είναι στο } n-1 \text{ στην κατ/ση } 0 \text{ και } 0\to 0 & A_1\\ \text{ή να είναι στο } n-1 \text{ στην κατ/ση } 1 \text{ και } 1\to 0 & A_2\end{matrix}\right)=$

$$=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=P(A_{11}\cap A_{12})+P(A_{21}\cap A_{22})$$

$$=P(X_{n-1}=0)\cdot(1-a)+P(X_{n-1}=1)\cdot\beta$$

$$=p_0^{(n-1)}(1-a)+p_1^{(n-1)}\cdot\beta=\left(p_0^{(n-1)}\ \ p_1^{(n-1)}\right)\begin{pmatrix}1-a\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$p_1^{(n)}=p_0^{(n-1)}\cdot a+p_1^{(n-1)}(1-\beta)=\left(p_0^{(n-1)}\ \ p_1^{(n-1)}\right)\begin{pmatrix}a\\ 1-\beta\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(p_0^{(n)}\ \ p_1^{(n)}\right)}_{p^{(n)}}=\underbrace{\left(p_0^{(n-1)}\ \ p_1^{(n-1)}\right)}_{p^{(n-1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1-a & a\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}}_{P}$$

$$p^{(n)}=p^{(n-1)}\cdot P=p^{(n-2)}P\cdot P=\ldots=\ldots \Rightarrow$$

$$p^{(n)}=p^{(0)}\cdot P^n$$

$$p^{(0)}=\left(P(X_0=0)\ \ P(X_0=1)\right)$$

π.χ. $p^{(15)}=\left(P(X_{15}=0)\ \ P(X_{15}=1)\right)=p^{(0)}\cdot P^{15}$

Έστω ένας πίνακας P με διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Τότε ο P γράφεται: $P=Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}Q^{-1}$ με $Q=(q_1,\ldots,q_n)$ $Pq_i=\lambda_i q_i$

$P=\begin{bmatrix}1-a & a\\ \beta & 1-\beta\end{bmatrix}$, Ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix}1-a-\lambda & a\\ \beta & 1-\beta-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-a-\lambda)(1-\beta-\lambda)-a\beta=0$

$$\Rightarrow \lambda^2+(a+\beta-2)\lambda+(1-a-\beta)=0$$

$$\Delta=(a+\beta)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1,\ 1-a-\beta$$

$$P\cdot q_1=\lambda_1 q_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}1-a & a\\ \beta & 1-\beta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}(1-a)q_{11}+aq_{21}=q_{11}\\ \beta q_{11}+(1-\beta)q_{21}=q_{21}\end{matrix}\right\}\Rightarrow q_{11}=q_{21}\ (\text{έστω}=1)$$

$$P q_2 = \lambda_2 q_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-a & a \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} = (1-a-\beta) \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (1-a) q_{12} + a q_{22} &= (1-a-\beta) q_{12} \\ \beta q_{12} + (1-\beta) q_{22} &= (1-a-\beta) q_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a q_{22} = -\beta q_{12} \Rightarrow q_{22} = -\frac{\beta}{a} q_{12}$ (έστω $q_{12} = a$, $q_{22} = -\beta$)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad P^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1-a-\beta)^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left(Q \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} Q^{-1} \right)$$

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-\beta)^n \end{bmatrix} \frac{1}{-\beta-a} \begin{bmatrix} -\beta & -a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\text{Αν } \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \text{ τότε } \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & a \end{bmatrix} \frac{1}{a\delta - \beta\gamma} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-\beta)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\beta+a} = \frac{1}{a+\beta} \begin{bmatrix} \beta + a \cdot (1-a-\beta)^n & a - a(1-a-\beta)^n \\ \beta - \beta(1-a-\beta)^n & a + \beta(1-a-\beta)^n \end{bmatrix}$$

$\{0,1\}$ $\quad P(X_{15} = 1)$

$p^{(n)} = p^{(0)} P^n$, όπου $\big(P(X_{15}=0) \cdot P(X_{15}=1)\big) = \big(p_0^{(0)} \; p_1^{(0)}\big) P^{15} =$

Συμβολίζω $P^{15} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

$$P(X_{15}=1) = p_0^{(0)} y + p_1^{(0)} w$$

2) $p_0^{(n)} = P\begin{pmatrix} \text{να είναι αρχικά στο 0 κ από εκεί να πάει στο 0} \\ \text{ή να είναι αρχικά στο 1 κ από εκεί να πάει στο 0} \end{pmatrix}$

$p_0^{(n)} = p_0^{(0)} p_{00}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{10}^{(n)}$

$p_1^{(n)} = p_0^{(0)} p_{01}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{11}^{(n)}$

$$\big(p_0^{(n)} \; p_1^{(n)}\big) = \big(p_0^{(0)} \; p_1^{(0)}\big) \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$P^{(n)} = P^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \quad , \text{ισχύει } P^{(n)} = P^{0} P^{n} \Rightarrow P^{n} = \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

3) $\Pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_j^{(n)} \quad , j=0,1 \quad , \Pi_0+\Pi_1=1$

α' τρόπος $\quad \Pi_0 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

$\Pi_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (αφού έχουμε αποδείξει 1,2)

β' τρόπος

$P^{(n)} = P^{(n-1)} P$

$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty} [P^{(n-1)} P]$

$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1) \quad , \Pi = \Pi P$

$(\Pi_0, \Pi_1) = (\Pi_0 \ \Pi_1) \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{cases} \Pi_0 = \Pi_0(1-\alpha) + \Pi_1 \beta \\ \Pi_1 = \Pi_0 \alpha + (1-\beta)\Pi_1 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \alpha\Pi_0 = \beta\Pi_1 \\ \text{με } \Pi_0+\Pi_1=1 \end{matrix} \Rightarrow \Pi_0 + \frac{\alpha}{\beta}\Pi_0 = 1 \Rightarrow \Pi_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Άσκηση 49

X_n: η σ.δ που παριστάνει το κέρδος του μετά το n-οστό παιχνίδι.

$X_0=0$. Είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος με 2 φράγματα απορρόφησης στο $a=12$, $-b=-8$

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, όπου Y_i είναι η τμ παριστάνει την i-οστή μετατόπιση

Y_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με σ.π. $P(Y_i=y) = \begin{cases} p & y=1 \\ q & y=-1 \end{cases}$

$EY_i = p\cdot 1 + q(-1) = p-q$

$Var Y_i = EY_i^2 - (EY_i)^2 = (p+q) - (p-q)^2$

Από θεώρημα Wald: $E(g(s)^{-T} e^{sX_T}) = 1 \quad \forall s \in S$

όπου $g(s) = E(e^{sY})$, X_T η τμ με τιμές $-b, a$

Αρχικά δ.δ.ο $P(\text{τελικής απορρ}) = 1$

$P(\text{τελ απορρ}) = 1 - P(\text{κινείται απερ})$

$P(\text{κινείται απερ}) = P(-b < X_n < a) \le P(-b < X_n^* < a)$, όπου X_n^* η σ.δ του ΕΛΤΠ

$\phi\epsilon$ $X_n^* = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, όπου Z_i η τ.μ που παριστάνει των i-οστό μετατόπισου του Ε.Α.Τ.Π, $P(Z_i = z) = \begin{cases} p & z_i = 1 \\ q & z_i = -1 \\ 1-p-q & z_i = 0 \end{cases}$

$EZ_i = \mu_1 = p - q$

$\operatorname{Var} Z_i = (p+q) - (p-q)^2 = \sigma_1^2$

$P(-b < X_n^* < a) = P(-b < \sum Z_i < a) = P\left(\frac{-b - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}} < \frac{\sum Z_i - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}} < \frac{a - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right)$

ΚΟΘ

$\simeq \Phi\left(\frac{a - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-b - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right) = A_1$

$\mu_1 = 0 \Rightarrow A_1 \to 0$

$\mu_1 > 0 \Rightarrow A_1 \to 0 \quad (\Phi(-\infty) - \Phi(-\infty))$

$\mu_1 < 0 \Rightarrow A_1 \to 0 \quad (\Phi(+\infty) - \Phi(+\infty))$

Άρα $P($κινείται απορρ$) = 0$

$\Rightarrow P($τελ απορρ$) = 1$

Αν $\mu \neq 0$ $\exists\, s_0$ τ.ω. $g(s_0) = 1$

Είναι $g(s) = E(e^{sY}) = p \cdot e^{s} + q e^{-s}$

$g(s) = 1 \Rightarrow s_0$ ή $s_0 = \ln(q/p)$

$E\left[e^{s_0 X_T}\right] = 1$

$e^{s_0 \cdot a} P($απορρ στο $a) + e^{s_0(-b)} P($απορρ στο $-b) = 1$

$e^{s_0 a} A + e^{-s_0 b}(1 - A) = 1 \Rightarrow A = \frac{1 - e^{-s_0 b}}{e^{s_0 a} - e^{-s_0 b}}$

Παραγωγίζουμε ως προς s: $E\left[-T g(s)^{-T-1} g'(s) e^{sX_T} + X_T e^{sX_T} g(s)^{-T}\right] = 0 \quad \forall s$

Θέτω $s = 0 \Rightarrow g(0) = E(e^{0Y}) = 1$

$ET = \frac{EX_T}{\mu}$ $\quad g'(0) = EY = \mu$, $EX_T = aA - bB$